

1	2	3	4	Σ
4	4	4	4	16/16

① $X(x) := x - 0,5 \Rightarrow E(X) = \int_0^1 x - 0,5 dx = 0$ $\odot$
 $Y(x) := x^2 - x + \frac{1}{6} \Rightarrow E(Y) = \int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{6} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x \right]_0^1 = 0$ ✓
 $\Rightarrow E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) = E(X \cdot Y)$
 $= \int_0^1 (x - 0,5) (x^2 - x + \frac{1}{6}) dx = \int_0^1 x^3 - 0,5x^2 - x^2 + 0,5x + \frac{1}{6}x - \frac{1}{12} dx$
 $= \int_0^1 x^3 - 1,5x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{12} dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 0,5x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{12}x \right]_0^1 = 0$ ✓
 $\Rightarrow X$ und Y unkorreliert ✓
 aber $E = X^{-1}(\left[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}} \right]) = \left[0, \frac{3}{4} \right]$
 $F = Y^{-1}([-1, 0]) = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}} \right]$
 $\Rightarrow P(E \cap F) = P\left(\left[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}} \right] \cap \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}} \right]\right)$
 $= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{12}}$
 and $P(E) \cdot P(F) = \frac{3}{4} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{12}} \neq P(E \cap F)$
 $\Rightarrow X, Y$ nicht unabhängig ✓ ✓ 4/4

② a) $P(X+Y+Z=k) =: p_k$
 $p_0 = 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,8 = \underline{0,04}$ ✓
 $p_1 = 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = \underline{0,005}$ ✓
 $p_2 = 0,5(0,2 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,1) + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,8 = \underline{0,101}$ ✓
 $p_3 = 0,5(0,2 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,8) + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = \underline{0,292}$ ✓
 $p_4 = 0,5 \cdot (0,2 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,1) + 0,2(0,1 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,8)$
 $+ 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,8 = \underline{0,103}$ ✓
 $p_5 = 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,2(0,2 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,8) + 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = \underline{0,159}$ ✓
 $p_6 = 0,2(0,2 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,1) + 0,3 \cdot (0,1 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,8)$
 $= \underline{0,069}$ ✓
 $p_7 = 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,3(0,2 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,8) = \underline{0,188}$ ✓

$$p_8 = 0,3 \cdot (0,2 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,1) = \underline{0,027} \quad \checkmark$$

$$p_9 = 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,1 = \underline{0,021} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{6} \quad P(2X+3Y+4Z=6) = 0,5 \cdot (0,2 \cdot 0,8) = \underline{0,08} \quad \checkmark$$

$\overset{P(X=0)}{0,5} \quad \overset{P(Y=2)}{0,2} \quad \overset{P(Z=0)}{0,8}$

4/4

$$\textcircled{4} \quad f(x) = 2x \quad g(x) = 3x^2$$

$$h(x) = \int_0^x f(t) g(x-t) dt$$

Verteilungsfunktion zu $X+Y$

Setze $f(x)|_{\mathbb{R} \setminus [0,1]} = 0$, $g(x)|_{\mathbb{R} \setminus [0,1]} = 0$

$\Rightarrow$ Fallunterscheidung: $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow t$ (im Integral) $\overset{[0,1]}{\in}$ $\checkmark$

$x-t \in [0,1] \quad \checkmark$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(x)|_{[0,1]} &= \int_0^x (2t) (3(x-t)^2) dt \\ &= \int_0^x 6(t^2x - 2t^3 + t^3) dt \\ &= \left[3x^2t^2 - 4x t^3 + \frac{3}{2} t^4 \right]_0^x \\ &= 3x^4 - 4x^4 + \frac{3}{2} x^4 = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^4}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$1 < x \leq 2 \Rightarrow t \in [0,1] \Leftrightarrow$ obere Grenze Integral $\neq 1$

$x-t \in [0,1] \Leftrightarrow x-t \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq t$

$\Leftrightarrow$ obere Grenze Integral $\checkmark$

$= x-1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(x)|_{[1,2]} &= \left[3x^2t^2 - 4x t^3 + \frac{3}{2} t^4 \right]_{x-1}^1 \\ &= 3x^2 - 4x + \frac{3}{2} - 3x(x-1)^3 + 4(x-1)^3x \\ &\quad - \frac{3}{2}(x-1)^4 = \underline{\underline{3x^2 - 2x - \frac{1}{2}x^4}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^4 & \text{für } x \in [0,1] \\ 3x^2 - 2x - \frac{1}{2}x^4 & \text{für } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4/4

2) $X, Y, Z: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$

a) X, Y unabh. $\Leftrightarrow \{X=k\}$ und $\{Y=l\}$ unabh. $(\forall k, l)$

" $\Rightarrow$ ":

ZV unabh. bedeutet, dass $\{X \in [c_1, d_1]\}$ und $\{Y \in [c_2, d_2]\}$ für beliebige Intervalle $[c_i, d_i]$ unabh. sind (in diesem Fall reicht $[c_i, d_i] \cap \mathbb{Z}$, da andere Werte nicht angenommen werden). Wähle also $[c_1, d_1] = [k, k] = \{k\}$ und $[c_2, d_2] = [l, l] = \{l\}$ (mit k, l beliebig). Dann folgt die Behauptung. ✓

" $\Leftarrow$ ": Fixiere ein bestimmtes k und lasse l laufen. Es ist $\{X=k\}$ unabh. zu $\{Y=l\}$ $(\forall l)$, also auch unabh. zu $\{Y \in [c_2, d_2] \cap \mathbb{Z}\}$ mit $[c_2, d_2]$ beliebig. Nun lässt man k laufen und erhält nach gleichem Schema, dass dieses Ereignis unabh. zu $\{X \in [c_1, d_1] \cap \mathbb{Z}\}$ ist. Da die ZV $\mathbb{Z}$ -wertig sind, reicht dies für deren Unabh. aus (keine echten Intervalle nötig). ✓

etwas
formaler
aufschreiben,
Idee
gut!

b) X, Y, Z unabh. $\Rightarrow \{X \in [c_1, d_1]\}, \{Y \in [c_2, d_2]\}, \{Z \in [c_3, d_3]\}$ unabh.

Betrachte (da bel. Intervalle)

$$\{\omega \mid Y(\omega) \in [c_2 + \min_{Z(\omega) \in [c_3, d_3]} Z(\omega), d_2 + \max_{Z(\omega) \in [c_3, d_3]} Z(\omega)]\}$$

warum! $\rightarrow$ Dieses Ereignis ist unabh. zu $\{X \in [c_1, d_1]\}$ und

lässt sich umschreiben zu

$$\{\omega \mid (Y+Z)(\omega) \in [c_2, d_2]\}$$

Also sind X und $Y+Z$ auch unabh. ✓

etwas
detaillierter!

(4)/4